

# ESTRATEGIAS FEEDBACK COOPERATIVAS

**MACARRO HEREDIA M. J.**  
Departamento de Economía Aplicada  
Universidad de Valladolid  
correo-e: [jmacarro@eco.uva.es](mailto:jmacarro@eco.uva.es)

**SOTO TORRES M. D.**  
Departamento de Economía Aplicada  
Universidad de Valladolid  
correo-e: [lolasoto@eco.uva.es](mailto:lolasoto@eco.uva.es)

## Resumen

Considerando un juego diferencial entre dos coaliciones, de suma no nula, el objeto en este trabajo es encontrar soluciones eficientes feedback para los jugadores suponiendo tanto un horizonte temporal finito como infinito en el desarrollo del juego. Teniendo en cuenta el concepto de solución eficiente en sentido de Pareto, las soluciones eficientes que se encuentran, utilizando como método de búsqueda el principio del mínimo o la programación dinámica, son idénticos aunque su representación es distinta; además, esta representación depende del horizonte temporal elegido para el juego, ya que si éste es infinito la búsqueda conlleva la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones, mientras que para un periodo temporal finito la obtención supone la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con coeficientes variables.

Palabras clave: Juegos diferenciales, estrategias feedback.

## 1.- INTRODUCCIÓN

Es conocida la política emergente de concienciación social respecto al mantenimiento de estrategias medio ambientales proclives hacia la reducción de emisiones de gases contaminantes a la atmósfera para intentar paliar el denominado efecto invernadero. Son numerosas las reuniones internacionales cuyo objetivo es obtener acuerdos dirigidos a frenar o al menos no agravar el problema del calentamiento global de la atmósfera. Muchas de estas reuniones no alcanzan el consenso necesario debido, entre otros aspectos, a que las naciones industrializadas necesitarían modificar gran parte de sus estructuras productivas para disminuir sus emisiones a la atmósfera y las naciones menos contaminantes, que coinciden con las menos desarrolladas, desearían incrementar sus emisiones para alcanzar un nivel de desarrollo apropiado. Podría decirse que intereses económicos, sociales y políticos, considerados aisladamente o en conjunción con otros elementos, son los que abren o cierran posibilidades para llegar a acuerdos que influenciarán el desarrollo futuro de la vida en este planeta.

Debido a la necesidad de buscar soluciones para el problema, distintos trabajos tratan de abordarlo desde distintas perspectivas técnicas y económicas. Se utilizan modelos de simulación haciendo intervenir aspectos económicos y ecológicos como en Carraro et al.(1996), Nordhaus (1996); se realizan valoraciones de coste-beneficios como en Gusbin et al. (2000) que subraya que la adopción del protocolo de Kyoto supondría pérdidas en el PIB tanto en EE.UU. como en la UE; también se utiliza como instrumento para el análisis la teoría de juegos con el objetivo de encontrar estrategias a seguir por empresas o coaliciones de países como en Dockner et al. (1993), Kaitala et al. (1995), Petrakis et al.(2003) o Zahaf (2004).

El trabajo de Kaitala y Pohjola (1.995) aborda, considerando dos administraciones distintas, el problema del coste asociado al mantenimiento de unas cuotas de emisión y al coste que ocasiona, a cada una de ellas, el compartir una atmósfera contaminada. Estos autores formularon un juego diferencial, en horizonte infinito, cuya variable de estado correspondía al exceso de  $CO_2$  en la atmósfera respecto al nivel existente en 1.990, estando determinada su evolución en el tiempo como una función de las emisiones de las coaliciones y de la actuación de limpieza natural del medio ambiente. Si las dos administraciones se coaligan, la búsqueda de soluciones cooperativas puede realizarse por distintos procedimientos. Una alternativa es utilizar programación dinámica en vez del principio del mínimo, representando ambos los procedimientos más ampliamente utilizados en la búsqueda de estrategias en los

juegos diferenciales.

El objetivo en este trabajo es utilizar programación dinámica para resolver el problema del jugador cooperativo y de este modo, encontrar estrategias feedback que tienen la característica de ser consistentes en el tiempo. Las estrategias dependerán del valor que alcance la variable de estado y del momento en el que se desarrolle el juego y serán independientes de la situación inicial de la variable de estado. La aplicación de la programación dinámica para la búsqueda de las estrategias presenta características diferentes según se considere el juego propuesto en horizonte finito o infinito. En este trabajo, perseguimos obtener los controles feedback en ambos supuestos.

El trabajo dividido en secciones se ocupa, del planteamiento y formulación del juego y del problema que tiene que resolver el jugador cooperativo. Se determinan las estrategias feedback para el jugador cooperativo cuando el juego se desarrolla sobre un horizonte temporal infinito y se buscan estas estrategias feedback cuando la amplitud temporal del juego es finita. Además se realiza un análisis numérico dando valores específicos a los parámetros para contrastar algunos resultados y por último el trabajo concluye subrayando ciertos aspectos obtenidos en su elaboración.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL JUEGO

Denotemos por  $Q(t)$  el exceso de  $CO_2$  en la atmósfera en un momento cualquiera  $t$  respecto de sus valores para el año 1.990 en una zona geográfica con dos administraciones distintas; por  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  las emisiones instantáneas de  $CO_2$  de cada una de las dos administraciones y por  $e_{1m}$ ,  $e_{2m}$  sus cuotas de emisión pactadas.

Considerando un horizonte temporal de amplitud finita  $T$  o infinita, supongamos que cada administración trata de minimizar el valor actual del coste asociado a la desviación de sus emisiones instantáneas respecto de sus cuotas de emisión acordadas más el valor actual del coste asociado al nivel de  $CO_2$  presente en la atmósfera en cada momento durante el desarrollo del juego; luego cada administración  $i = 1, 2$  intenta minimizar

$$\int_0^{T, \infty} e^{-\rho t} [C_i(e_i(t)) + D_i(Q(t))] dt$$

conociendo ambas, que la evolución de la contaminación verifica la ecuación diferencial

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t), \quad Q(0) = 0,$$

siendo  $\rho$  la tasa de actualización supuesta idéntica para ambas administraciones,  $\sigma$  y  $\beta$  parámetros positivos que recogen la intervención de la naturaleza sobre las emisiones y sobre la contaminación medioambiental latente en la atmósfera, respectivamente, y  $C_i, D_i$ , para  $i = 1, 2$ , representan las funciones de costes para cada administración, respecto a las emisiones y al tener que soportar la contaminación ambiental.

Tenemos, por tanto, formulado un juego diferencial con dos jugadores de suma no nula sobre un horizonte temporal finito o infinito. Si suponemos que ambas administraciones acuerdan seguir estrategias cooperativas en la búsqueda de soluciones para sus problemas, ellas constituirán un único agente que tratará de resolver el problema de los dos objetivos, sujeto a la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la contaminación ambiental junto con su condición inicial.

Para encontrar las soluciones cooperativas podemos utilizar el procedimiento de las ponderaciones y ajustando expresiones cuadráticas a las funciones de costes especificadas en los funcionales de los jugadores, tendremos que resolver el problema uniobjetivo de minimizar

$$\int_0^{T, \infty} e^{-\rho t} \left[ \frac{\alpha}{2} (c_1(e_1(t) - e_{1m})^2 + d_1 Q(t)^2) + \frac{(1-\alpha)}{2} (c_2(e_2(t) - e_{2m})^2 + d_2 Q(t)^2) \right] dt$$

teniendo en cuenta la evolución de la contaminación junto con su condición inicial, donde  $\alpha \in (0, 1)$ , es el parámetro de ponderación y  $c_i, d_i$ , para  $i = 1, 2$ , son parámetros positivos que recogen costes unitarios que posiblemente sean diferentes para cada una de las administraciones. El jugador cooperativo tratará de encontrar los valores de las emisiones  $e_1(t), e_2(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ , en horizonte finito o para todo  $t \in [0, \infty)$ , si la amplitud temporal del juego es infinita, de modo que el problema uniobjetivo alcanza un mínimo.

### 3.- DURACIÓN INFINITA DEL JUEGO

Para resolver el problema uniobjetivo de las ponderaciones por programación dinámica consideramos el hamiltoniano asociado al problema

$$\begin{aligned} H(t, e_1, e_2, Q) = & \frac{\alpha}{2} (c_1(e_1(t) - e_{1m})^2 + d_1 Q(t)^2) + \\ & \frac{(1-\alpha)}{2} (c_2(e_2(t) - e_{2m})^2 + d_2 Q(t)^2) + \\ & \frac{\partial V(t, Q)}{\partial Q} [\sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t)] \end{aligned}$$

donde  $V(t, Q)$  es la función de valor asociada al jugador cooperativo. La resolución del problema asociado al hamiltoniano

$$\min_{e_1, e_2} H(t, e_1, e_2, Q)$$

que constituye un programa convexo y diferenciable y, por tanto, las condiciones necesarias de mínimo son también condiciones suficientes, determinan los valores de las emisiones para todo  $t \in [0, \infty)$  y encontramos

$$e_1^* = e_{1m} - \frac{\sigma}{\alpha c_1} \frac{\partial V(t, Q)}{\partial Q},$$

$$e_2^* = e_{2m} - \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2} \frac{\partial V(t, Q)}{\partial Q}.$$

Para cada  $\alpha \in (0, 1)$ , el par  $(e_1^*, e_2^*)$  constituye un óptimo de Pareto si somos capaces de determinar una función de valor que verifique la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$- \left[ \frac{\partial V(t, Q)}{\partial t} - \rho V(t, Q) \right] = H(t, e_1^*, e_2^*, Q)$$

con la condición  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \frac{\partial V(t, Q)}{\partial Q} = 0$ . Si proponemos como función de valor

$$V(Q) = a_0 Q^2 + a_1 Q + a_2$$

y, por tanto, con coeficientes independientes del tiempo y sólo dependientes del nivel de contaminación, la ecuación diferencial que tiene que satisfacer la función de valor será

$$\rho V(Q) = \frac{dV(Q)}{dQ} \left[ \sigma(e_{1m} + e_{2m}) - \left( \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right) \frac{dV(Q)}{dQ} - \beta Q \right] +$$

$$\frac{\alpha}{2} \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha^2 c_1} \left( \frac{dV(Q)}{dQ} \right)^2 + d_1 Q^2 \right] +$$

$$\frac{(1-\alpha)}{2} \left[ \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2 c_2} \left( \frac{dV(Q)}{dQ} \right)^2 + d_2 Q^2 \right],$$

y para resolverla podemos aplicar el procedimiento de los coeficientes indeterminados. En este caso las incógnitas de la función de valor tendrán que verificar el sistema de ecuaciones no lineales

$$\rho a_0 = -2a_0^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] - 2\beta a_0 + \frac{1}{2} [\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2],$$

$$\begin{aligned}\rho a_1 &= -2a_0a_1 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] - \beta a_1 + 2a_0\sigma(e_{1m} + e_{2m}), \\ \rho a_2 &= -\frac{1}{2}a_1^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] + a_1\sigma(e_{1m} + e_{2m}).\end{aligned}$$

La primera ecuación determina, para cada  $\alpha$ , dos posibles valores para  $a_0$ , uno positivo y otro negativo, pero considerando el positivo la función de valor verifica la condición terminal y si operamos, encontramos

$$\begin{aligned}a_0(\alpha) &= \frac{\lambda_1(\alpha) - \beta - \rho}{2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right]}, \\ a_1(\alpha) &= \frac{(\lambda_1(\alpha) - \beta - \rho)\sigma(e_{1m} + e_{2m})}{\lambda_1(\alpha) \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right]}, \\ a_2(\alpha) &= \frac{\sigma^2(e_{1m} + e_{2m})^2(\lambda_1(\alpha)^2 - (\beta + \rho)^2)}{2\rho\lambda_1(\alpha)^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right]},\end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1(\alpha) = \frac{\rho + \sqrt{(\rho + 2\beta)^2 + 4 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] (\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2)}}{2},$$

y  $\lambda_2(\alpha) = \rho - \lambda_1(\alpha)$ , que utilizaremos posteriormente.

Determinada la función de valor, podemos obtener distintos resultados. Los controles feedback para el jugador cooperativo serán

$$\begin{aligned}e_1^*(Q, \alpha) &= e_{1m} - \frac{\sigma}{\alpha c_1} [2a_0(\alpha)Q + a_1(\alpha)], \\ e_2^*(Q, \alpha) &= e_{2m} - \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2} [2a_0(\alpha)Q + a_1(\alpha)],\end{aligned}$$

y por tanto las emisiones de las administraciones en cada momento dependen del valor del parámetro de ponderación  $\alpha$  y del nivel de contaminación en ese momento y son independientes del momento en el que se apliquen. Observemos que si el nivel de contaminación crece, las emisiones de las administraciones disminuirán para cualquier valor del parámetro de ponderación  $\alpha$ .

Si el jugador cooperativo aplica estas emisiones desde el momento inicial, el valor actual del coste en el que incurre durante el desarrollo del juego será  $a_2(\alpha)$ , valor

que coincide con  $\alpha J_1(\alpha) + (1 - \alpha)J_2(\alpha)$ , siendo

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\rho t} [(c_1(e_1^*(Q, \alpha) - e_{1m})^2 + d_1 Q^2)] dt,$$

el coste de la administración denotada por uno y

$$J_2(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\rho t} [(c_2(e_2^*(Q, \alpha) - e_{2m})^2 + d_2 Q^2)] dt,$$

el coste de la otra administración.

Si las emisiones óptimas comienzan a aplicarse en  $t \in (0, \infty)$ , el valor actual del coste asociado al jugador cooperativo en  $t$  será

$$\int_t^\infty e^{-\rho(z-t)} \left[ \frac{\alpha}{2} (C_1(e_1^*(Q, \alpha)) + D_1(Q)) + \frac{(1-\alpha)}{2} (C_2(e_2^*(Q, \alpha)) + D_2(Q)) \right] dz,$$

que coincide con la función de valor  $V(Q) = a_0 Q^2 + a_1 Q + a_2$ .

Mediante los resultados ya obtenidos podemos encontrar la evolución del exceso de contaminación en función del tiempo resolviendo la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \sigma(e_{1m} + e_{2m}) - \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] [2a_0(\alpha)Q(t) + a_1(\alpha)] - \beta Q(t),$$

que proporciona como solución

$$Q(t, \alpha) = \frac{\sigma(e_{1m} + e_{2m})(\rho + \beta)}{\lambda_1(\alpha)\lambda_2(\alpha)} (e^{\lambda_2(\alpha)t} - 1) = Q^*(\alpha)(1 - e^{\lambda_2(\alpha)t})$$

para todo  $t \in [0, \infty)$ . La contaminación, por tanto, evoluciona siguiendo una función monótona creciente con  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, \alpha) = Q^*(\alpha) > Q(0)$ ; la velocidad de ajuste hacia  $Q^*(\alpha)$  depende de  $\lambda_2(\alpha)$  al verificarse

$$\frac{Q^*(\alpha) - Q(t, \alpha)}{Q^*(\alpha) - Q(0, \alpha)} = e^{\lambda_2(\alpha)t}.$$

La función  $Q^*(\alpha)$  es creciente respecto de las cuotas de emisión pactadas,  $e_{1m}$ ,  $e_{2m}$  y respecto a los costes unitarios  $c_1$ ,  $c_2$ ; es decreciente respecto de los costes unitarios  $d_1$  y  $d_2$  y alcanza un óptimo si el parámetro de ponderación  $\alpha = \frac{\sqrt{d_2 c_2}}{\sqrt{d_2 c_2} + \sqrt{d_1 c_1}}$ .

Observamos, también que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(Q(t))}{\partial Q} &= 2a_0(\alpha)Q(t, \alpha) + a_1(\alpha) = \\ &= -\frac{\sigma(e_{1m}+e_{2m})(\alpha d_1+(1-\alpha)d_2)}{\lambda_1(\alpha)\lambda_2(\alpha)} - 2a_0(\alpha)Q^*(\alpha)e^{\lambda_2(\alpha)t} = \\ &= Q^{**}(\alpha) - 2a_0(\alpha)Q^*(\alpha)e^{\lambda_2(\alpha)t} \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, \infty)$ ; luego, esta función es positiva, monótona creciente y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial V(Q(t))}{\partial Q} = Q^{**}(\alpha) > 0.$$

La velocidad de ajuste hacia  $Q^{**}(\alpha)$  coincide con la que presenta  $Q(t, \alpha)$  respecto con  $Q^*(\alpha)$  y ambas coinciden con la que presentan las soluciones eficientes  $e_1^*(t, \alpha)$ ,  $e_2^*(t, \alpha)$ , hacia  $e_{1m} - \frac{\sigma}{\alpha c_1}Q^{**}(\alpha) < e_{im}$ ,  $e_{2m} - \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2}Q^{**}(\alpha) < e_{im}$ , respectivamente. También se puede observar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e_1^*(t, \alpha) + e_2^*(t, \alpha)) = \frac{\beta}{\sigma}Q^*(\alpha) > 0$ .

### 3.- DURACIÓN FINITA DEL JUEGO

Si resolvemos el problema de las ponderaciones del jugador cooperativo extendidas las integrales a un periodo temporal finito aplicando programación dinámica, tendremos que considerar el mismo hamiltoniano que utilizamos en el caso de horizonte infinito y resolver idéntico problema asociado, por tanto, los controles óptimos satisfacen las mismas expresiones. La sustitución de los controles óptimos en el hamiltoniano también nos conduce a resolver la misma ecuación diferencial en derivadas parciales que tiene que satisfacer la ecuación de valor, pero ahora tenemos la condición terminal  $V(T, Q_T) = 0$ , denotando por  $Q_T$  el valor de la contaminación para el problema que ahora estudiamos. La nueva condición terminal nos impide considerar el mismo ajuste sobre la función de valor que se realizó en horizonte infinito y por ello proponemos como función de valor para este caso

$$V(t, Q_T) = a_0(t)Q_T^2 + a_1(t)Q_T + a_2(t)$$

y por tanto, en horizonte finito los coeficientes que determinan la función de valor son dependientes del tiempo. La ecuación de Hamilton-Jacobi que ahora tendremos



que resolver es

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial V(t, Q_T)}{\partial t} - \rho V(t, Q_T)\right) &= \frac{dV(t, Q_T)}{dQ_T} \sigma(e_{1m} + e_{2m}) - \\
&\frac{dV(t, Q_T)}{dQ_T} \left[ \left(\frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2}\right) \frac{dV(t, Q_T)}{dQ_T} + \beta Q \right] + \\
&\frac{\alpha}{2} \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha^2 c_1} \left(\frac{dV(t, Q_T)}{dQ_T}\right)^2 + d_1 Q_T^2 \right] + \\
&\frac{(1-\alpha)}{2} \left[ \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2 c_2} \left(\frac{dV(t, Q_T)}{dQ_T}\right)^2 + d_2 Q_T^2 \right].
\end{aligned}$$

Si sustituimos por el ajuste realizado, tendremos que los coeficientes de la función de valor, que desconocemos, tienen que verificar el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes dependientes del tiempo

$$\begin{aligned}
\rho a_0(t) &= -2a_0(t)^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] - 2\beta a_0(t) + \frac{1}{2} [\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2] + \frac{da_0(t)}{dt}, \\
\rho a_1(t) &= -2a_0(t)a_1(t) \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] - \beta a_1(t) + 2\sigma(e_{1m} + e_{2m})a_0(t) + \frac{da_1(t)}{dt}, \\
\rho a_2(t) &= -\frac{1}{2}a_1(t)^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] + \sigma(e_{1m} + e_{2m})a_1(t) + \frac{da_2(t)}{dt},
\end{aligned}$$

y además, tenemos que tener en cuenta las condiciones terminales sobre los coeficientes  $a_0(T) = 0$ ,  $a_1(T) = 0$ ,  $a_2(T) = 0$ , desde la condición terminal que tiene que verificar la función de valor.

La ecuación que satisface  $a_0(t)$  es una ecuación diferencial de Ricatti, cuya solución es

$$a_0(t, \alpha) = \frac{(\lambda_1(\alpha) - \rho - \beta)(\lambda_2(\alpha) - \rho - \beta)(1 - e^{(\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha))(t-T)})}{2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] (\lambda_2(\alpha) - \rho - \beta - (\lambda_1(\alpha) - \rho - \beta)e^{(\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha))(t-T)}}$$

y, observemos  $\lim_{T \rightarrow \infty} a_0(t, \alpha) = a_0(\alpha)$ , que conecta los coeficientes en el caso de horizonte infinito y finito.

Resolviendo la segunda ecuación diferencial, encontramos

$$a_1(t, \alpha) = M(\alpha) \left[ \frac{e^{(\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha))(t-T)}}{\lambda_2(\alpha)} - \frac{1}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{(\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha))e^{(\lambda_1(\alpha) - \rho - \beta)(t-T)}}{\lambda_1(\alpha)\lambda_2(\alpha)} \right]$$

siendo

$$M(\alpha) = -2 \frac{\sigma(e_{1m} + e_{2m})(\lambda_1(\alpha) - \rho - \beta)(\lambda_2(\alpha) - \rho - \beta)}{\left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] (\lambda_2(\alpha) - \rho - \beta - (\lambda_1(\alpha) - \rho - \beta)e^{(\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha))(t-T)}}$$

También se verifica  $\lim_{T \rightarrow \infty} a_1(t, \alpha) = a_1(\alpha)$ .

Conociendo los valores de  $a_0(t, \alpha)$  y  $a_1(t, \alpha)$ , podemos encontrar las soluciones eficientes

$$e_1^*(t, Q_T, \alpha) = e_{1m} - \frac{\sigma}{\alpha c_1} [2a_0(t, \alpha)Q_T + a_1(t, \alpha)],$$

$$e_2^*(t, Q_T, \alpha) = e_{2m} - \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2} [2a_0(t, \alpha)Q_T + a_1(t, \alpha)],$$

y desde ellas la evolución de la contaminación para todo  $t \in [0, T]$

$$Q_T(t) = Q^*(\alpha) - H_1(\alpha)e^{\lambda_1(\alpha)(t-T)} + H_2(\alpha)e^{\lambda_2(\alpha)(t-T)}$$

donde

$$H_1(\alpha) = \frac{(\rho + \beta - \lambda_1(\alpha))Q^*(\alpha) + \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] Q^{**}(\alpha)e^{-\lambda_2(\alpha)T}}{(\rho + \beta - \lambda_1(\alpha))e^{-\lambda_1(\alpha)T} - (\rho + \beta - \lambda_2(\alpha))e^{-\lambda_2(\alpha)T}},$$

$$H_2(\alpha) = \frac{(\rho + \beta - \lambda_2(\alpha))Q^*(\alpha) + \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] Q^{**}(\alpha)e^{-\lambda_1(\alpha)T}}{(\rho + \beta - \lambda_1(\alpha))e^{-\lambda_1(\alpha)T} - (\rho + \beta - \lambda_2(\alpha))e^{-\lambda_2(\alpha)T}},$$

son funciones negativas para cualquier valor del parámetro de ponderación y verifican  $1 < \frac{H_2(\alpha)}{H_1(\alpha)} < \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2$ . Con estos resultados podemos comprobar que el nivel de contaminación crece con el tiempo y en un primer intervalo se comporta como si el horizonte fuera infinito hasta alcanzar

$$t_{Q^*} = T + \frac{1}{\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha)} \text{Ln} \left[ \frac{H_2(\alpha)\lambda_2(\alpha)^2}{H_1(\alpha)\lambda_1(\alpha)^2} \right]$$

momento, a partir del cual la función es cóncava y sigue su recorrido hasta alcanzar  $Q_T(\alpha) = Q^*(\alpha) - H_1(\alpha) + H_2(\alpha) > Q^*(\alpha)$ .

Teniendo en cuenta que  $e^{-\rho t}(a_0(t, \alpha)Q_T(t)^2 + a_1(t, \alpha)Q_T(t) + a_2(t, \alpha))$  coincide con

$$\int_t^T e^{-\rho z} \left[ \frac{\alpha}{2}(C_1(e_1^*(z)) + D_1(Q_T(z))) + \frac{(1-\alpha)}{2}(C_2(e_2^*(z)) + D_2(Q_T(z))) \right] dz,$$

también podemos encontrar el valor de  $a_2(t, \alpha)$  que nos determina el valor actual

del coste asociado al jugador cooperativo durante todo el desarrollo del juego, esto es, coincide con

$$\int_0^T e^{-\rho z} \left[ \frac{\alpha}{2}(C_1(e_1^*(z)) + D_1(Q_T(z))) + \frac{(1-\alpha)}{2}(C_2(e_2^*(z)) + D_2(Q_T(z))) \right] dz.$$

Conociendo  $a_2(t, \alpha)$  tendremos determinada la expresión de la función de valor para todo  $t \in [0, T]$ .

La evolución de los óptimos de Pareto quedan determinados obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, Q_T(t, \alpha))}{\partial Q_T} &= 2a_0(t, \alpha)Q_T(t, \alpha) + a_1(t, \alpha) = \\ Q^{**}(\alpha) - (\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) &\left[ \frac{H_1(\alpha)}{\rho + \beta - \lambda_1(\alpha)} e^{\lambda_1(\alpha)(t-T)} - \frac{H_2(\alpha)}{\rho + \beta - \lambda_2(\alpha)} e^{\lambda_2(\alpha)(t-T)} \right] \end{aligned}$$

que, en función del tiempo, es una función cóncava y admite un máximo en

$$t_{Q^{**}} = T + \frac{1}{\lambda_1(\alpha) - \lambda_2(\alpha)} \text{Ln} \left[ \frac{H_2(\alpha)\lambda_2(\alpha)(\rho + \beta - \lambda_1(\alpha))}{H_1(\alpha)\lambda_1(\alpha)(\rho + \beta - \lambda_2(\alpha))} \right].$$

Luego el punto donde esta función alcanza el máximo es superior al momento donde el nivel de contaminación alcanza su punto de inflexión y también

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial V(t, Q_T(t, \alpha))}{\partial Q_T} = Q^{**}(\alpha).$$

Los óptimos de Pareto, por tanto, en función del tiempo, son funciones convexas que alcanzan un mínimo en el punto  $t_{Q^{**}}$ , momento que determina un fuerte cambio de tendencia en su comportamiento ya que desde ese momento las emisiones crecen hasta alcanzar la cuota pactada.

#### 4. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOS RESULTADOS

Teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior podemos observar que tanto los valores de las emisiones óptimas que las administraciones realizarían siguiendo una estrategia cooperativa como los niveles de contaminación que alcanzaría la atmósfera, dependen de numerosos valores paramétricos y, por tanto, sería posible analizar su comportamiento ante modificaciones de estos diferentes parámetros. En esta sección estudiamos el comportamiento de las variables más significativas del juego en dos situaciones específicas.

En un primer caso, supongamos que ambas administraciones tienen una capaci-

dad de contaminación similar de modo que puede considerarse que tienen costes iguales tanto por el problema mediambiental como para ajustarse a las cuotas pactadas de emisión y en un segundo caso, supongamos que una administración tiene unos costes mucho más elevados que la otra, que correspondería al caso de una administración con fuertes emisiones contaminantes frente a otra que prácticamente no contamina. En ambos casos supondremos que se pactan unas cuotas de emisión idénticas para ambas administraciones. En la tabla siguiente se muestran los valores paramétricos seleccionados

Parámetros fijos del Modelo							
$\rho$	0,05	$\sigma$	0,5	$\beta$	0,005	$T$	20
$e_{1m}$	10	$c_1$	15	$c'_1$	150	$c_2$	15
$e_{2m}$	10	$d_1$	12	$d'_1$	120	$d_2$	12

En la figura 1 se recoge la evolución, en función del tiempo, de la contaminación que recordemos tiende hacia  $Q^*(\alpha)$ . La gráfica de la izquierda muestra la evolución del nivel de contaminación cuando el horizonte temporal del juego es infinito considerando tres valoraciones para el parámetro de ponderación  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{3}{10}$ ,  $\frac{1}{2}$  cuando los costes para las administraciones son idénticos y  $\alpha = \frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{9}{10}$  cuando los costes son distintos. Cuando los costes son iguales  $Q^*(\alpha) = Q^*(1 - \alpha)$  y  $Q^*(\alpha)$  alcanza su máximo en  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; si los costes son distintos, la variable  $Q^*(\alpha)$  alcanza su máximo en  $\alpha = 0,09$ , encontrando  $Q^*(0,9) < Q^*(0,5)$  y la tendencia de la contaminación disminuye a medida que aumenta el parámetro de ponderación alcanzando los valores más pequeños que muestra el gráfico.

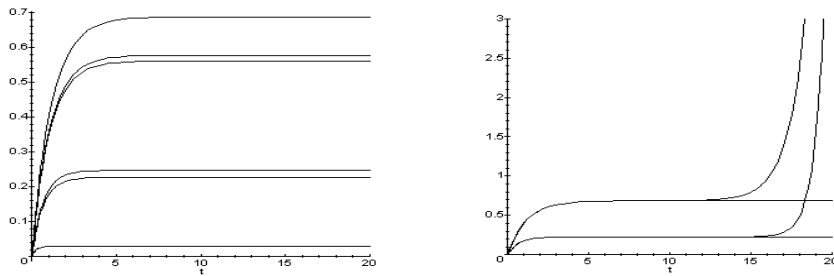


Figura 1: Niveles de contaminación.

La gráfica situada a la derecha compara la evolución de la contaminación cuando el juego se considera en horizonte finito e infinito y  $\alpha = \frac{1}{2}$  que corresponde al valor donde la variable  $Q^*(\alpha)$  alcanza su máximo si los costes unitarios de las administraciones son iguales; de ahí que los niveles de contaminación cuando los costes son distintos sean siempre inferiores a los que alcanza cuando los costes unitarios son iguales. También en esta gráfica se puede observar como el comportamiento de la contaminación en horizonte finito e infinito, independientemente de los valores de los costes unitarios, es idéntico hasta que  $Q_T(t, \frac{1}{2})$  alcanza su punto de inflexión.

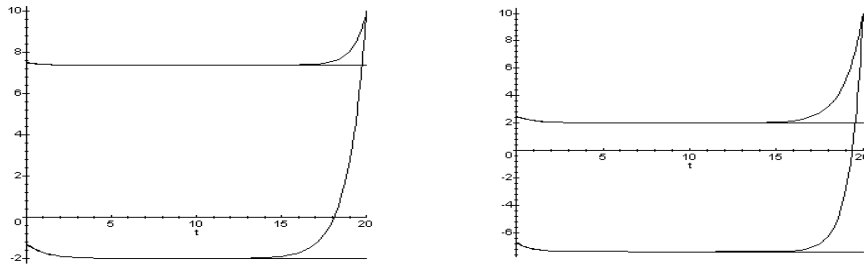


Figura 2: Emisiones óptimas.

En la figura dos se muestran las trayectorias que siguen las emisiones de las dos administraciones cuando ambas adoptan las estrategias cooperativas, el parámetro  $\alpha = \frac{2}{5}$  y el horizonte temporal del juego se toma finito o bien, infinito. La gráfica de la izquierda muestra los resultados para la administración con costes denotados por uno y la gráfica de la derecha para la administración denotada por dos. En la gráfica de la izquierda las trayectorias que proporcionan emisiones positivas durante todo el horizonte temporal corresponden al caso de costes distintos y en la gráfica de la derecha cuando los costes son iguales. Por tanto, las tareas de absorción son llevadas a cabo por la primera administración si los costes son iguales debido a la menor ponderación que se está dando a su funcional objetivo; esta tarea de absorción tiene que ser desarrollada por la segunda administración cuando los costes son distintos aunque observemos que es la primera administración la que presenta los costes unitarios más elevados. Observemos que en horizonte infinito las emisiones mantienen la tendencia hacia  $Q^{**}(0, 4)$  luego, si una administración tiene que realizar tareas de limpieza tendrá que realizarlas para siempre mientras que en horizonte

finito esta circunstancia no se produce ya que hacia el final del horizonte temporal existe un cambio de tendencia que obliga a las administraciones a provocar un crecimiento acelerado de las emisiones con objeto de alcanzar las cuotas pactadas.

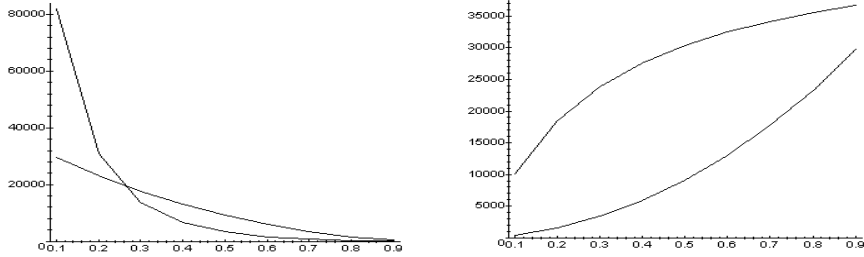


Figura 3: Costes de los jugadores.

Las variaciones en los costes unitarios de las administraciones también afectan a las valoraciones de los costes durante todo el desarrollo del juego para ambas administraciones. El horizonte temporal no afecta al comportamiento cualitativo de estas valoraciones aunque, si el horizonte temporal es infinito, las valoraciones de los costes son siempre superiores a las que se obtienen si el horizonte temporal es finito, siempre realizando estas comparaciones fijando el resto de los parámetros del juego. Si representamos estas valoraciones variando el parámetro de ponderación podemos observar en la gráfica de la izquierda de la figura tres, que el valor actual de los costes para la primera administración sigue una trayectoria creciente y cóncava independientemente de que los costes unitarios sean iguales o distintos, aunque las trayectorias también muestran que existe un valor del parámetro de ponderación para el que el valor actual del coste es idéntico y según aumenta el parámetro  $\alpha$  las valoraciones son mayores si los costes unitarios son iguales. La gráfica de la derecha recoge las valoraciones para la segunda administración y encontramos que si los costes unitarios son iguales el valor actual sigue un comportamiento creciente y cóncavo pero si los costes son distintos, el comportamiento sigue una función creciente esta vez cóncava sin puntos comunes respecto del caso cóncavo. Por tanto, la segunda administración, con valoraciones inferiores para el mismo valor del parámetro de ponderación que la primera administración, modifica la trayectoria de sus costes ante modificaciones de los costes unitarios de la otra administración.

## 5.- CONCLUSIONES

Hemos considerado un juego diferencial entre dos administraciones que intentan minimizar el valor actual del coste asociado a sus emisiones de  $CO_2$  a la atmósfera y al coste que supone para cada una de ellas el compartir una atmósfera contaminada con objeto de estudiar las estrategias a seguir por las administraciones si ellas aceptan soluciones cooperativas.

Para encontrar las estrategias cooperativas hemos utilizado programación dinámica en vez del principio del mínimo y de este modo hemos obtenido la representación feedback de las estrategias cooperativas tanto en horizonte finito como infinito.

Desde el planteamiento del juego, que sólo aborda el problema de la contaminación desde el punto de vista de los costes y desde los resultados obtenidos, hemos comprobado que tanto las emisiones óptimas de las administraciones como el nivel de contaminación que alcanza la atmósfera generado por ellas, son muy sensibles a los ajustes paramétricos que se consideren en el juego. Los comportamientos cualitativos de las emisiones y de la contaminación, fijado un horizonte temporal para el desarrollo del juego, son idénticos aunque los ajustes para costes unitarios, cuotas de emisión pactadas, parámetros de limpieza atmosférica y tanto de actualización, influyen sobre sus comportamientos cuantitativos y afectan a ambas administraciones. Las disparidades en los costes unitarios pueden provocar que la administración menos industrializada tenga que realizar labores de limpieza para que la más industrializada siga manteniendo un nivel de emisiones positivas cuyos efectos medioambientales afectará a ambas administraciones.

Desde un punto de vista estrictamente matemático parece necesario subrayar que los resultados obtenidos en el trabajo encuentran la solución para la ecuación diferencial que satisface  $a_2(t)$ . Si operamos en la ecuación diferencial que satisface esta variable, tendríamos

$$a_2(t) = e^{\rho t} \left[ \int e^{-\rho t} \left( \frac{1}{2} a_1(t)^2 \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha c_1} + \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)c_2} \right] - \sigma(e_{1m} + e_{2m})a_1(t) \right) dt + Cte, \right]$$

y dada la expresión que satisface  $a_1(t)$  no es obvio encontrar una primitiva para la integral. En todo caso, los resultados encontrados en el trabajo, respecto a esta cuestión, se deben a las relaciones que existen entre el principio del mínimo y la programación dinámica y a la propia definición de función de valor.

## REFERENCIAS

1. Basard, T. y G. J. Olsder, (1995): *Dynamic Non Cooperative Game Theory*. Academic Press. London.
2. Carraro, C. y D. Siniscalco, (1993): *Strategies for the International Protection of the Environment*. Journal of Public Economics, 4.
3. Carraro, C., M. Galeotti y M. Gallo, (1996): *Environmental Taxation and Unemployment: Some Evidence on the Double Dividend Hypothesis in Europe*. Journal of Public Economics, 62, pp. 141-181.
4. Dockner, J.E. y N. V. Long, (1993): *International Pollution Control: Cooperative versus Noncooperative Strategies*. Journal of Environmental Economics and Management 25, pp. 13-29.
5. Dudek, D.J. y J.B. Wiener, (1996): *Joint Implementation, Transaction Costs and Climate Change*. OECD Economics Department Working Papers, 173.
6. Gusbin, D. y Kouvaritakis, N. (2000): *Kyoto Protocol and Emission Trading: Potential Cost, Savings and Emission Reductions* en Economic Evaluation of Quantitative Objectives for Climate Change. Final Report, Comisión Europea, Bruselas.
7. Kaitala, V. y M. Pohjola, (1995): *Sustainable International Agreements on Greenhouse Warming: A Game Theory Study*. Annals of the International Society of Dynamic Games 2, pp. 67-87.
8. Nordhaus, W. (1996): *A Regional Dynamic General Equilibrium model of Alternative Climate Changes strategies*. American Economic Review, 86, pp. 741-765.
9. Petrakis, E. y A. Xepapadeas, (2003): *Location Decisions of a Polluting Firm and the Time Consistency of Environmental Policy*. Resource and Energy Economics 25(2), pp. 197-214.
10. Zahaf, M. (2004): *A Differential Game of Joint Implementation of Environmental Projects*. Mimeo.
11. Zeeuw, de A., F. Groot y C. Withagen, (1992): *Strong time-consistency in the cartel-versus-fringe model*. Journal of Economic Dynamics and Control, pp. 287-306.